

教师资格考试标准预测试卷
数学学科知识与教学能力（高级中学）
参考答案及解析（六） ~ （十）
(科目代码:404)

目 录

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(六) 参考答案及解析	(1)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(七) 参考答案及解析	(7)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(八) 参考答案及解析	(13)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(九) 参考答案及解析	(18)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(十) 参考答案及解析	(23)

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(六) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】B。解析：因为非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件是其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的

秩，且它们的秩小于未知数的个数，所以 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$ ，则 $\lambda - 1 =$

0, $\lambda = 1$ 。故本题选 B。

2. 【答案】D。解析：由等价无穷小量替换， $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}} = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 g(x) = 0$ (有界量与无穷小量的乘积是无穷小量)。所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在且为 0。而 $f(0) = 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos \Delta x}{\sqrt{\Delta x}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \Delta x^2}{(\Delta x)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x^2 g(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = 0$ 。故本题选 D。

3. 【答案】D。解析： yOz 平面上的曲线 $f(y, z)$ 绕 z 轴旋转一周，所得旋转曲面方程为 $f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ 。题中 $y > 0$ ，所以旋转曲面方程为 $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。故本题选 D。

4. 【答案】B。解析：设 $\beta = (2, 0, 0)$ 在此基底下的坐标是 (x_1, x_2, x_3) ，则有 $\beta^T = x_1 \alpha_1^T + x_2 \alpha_2^T + x_3 \alpha_3^T =$

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{即得一非齐次的线性方程组，对增广矩阵做初等行变换} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{所以 } x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

5. 【答案】B。解析：曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 6z = 10$ 为球面，将其化为标准方程为 $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 3)^2 = 36$ ，所以球心的坐标为 $(1, -4, -3)$ 。根据几何性质可知，所求的切平面垂直于过点 $(5, -2, 1)$ 和 $(1, -4, -3)$ 的直线，即可得切平面的一个法向量 $n = (4, 2, 4)$ ，所以所求的切平面的方程为 $4(x - 5) + 2(y + 2) + 4(z - 1) = 0$ ，化简得 $2x + y + 2z = 10$ 。故本题选 B。

6. 【答案】D。解析：由分布函数的定义 $F(x) = P(X \leq x)$ ，有 $G(y) = P(Y \leq y) = P(2X + 1 \leq y) = P\left(X \leq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)$ 。故本题选 D。

7. 【答案】D。解析：《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》指出，高中数学课程基本理念是 ① 学生发展为本，立德树人，提升素养；② 优化课程结构，突出主线，精选内容；③ 把握数学本质，启发思考，改进教学；④ 重视过程评价，聚焦素养，提高质量。

8. 【答案】B。解析：1828 年，法国天才数学家伽罗瓦巧妙而简洁地证明了存在某种不能用开方运算求解方程的方法，同时还提出了一个代数方程能用根式求解的判定定理。

二、简答题

9.【参考答案】

$$\text{由题意知 } \mathbf{CB}^T = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3, \mathbf{B}^T \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

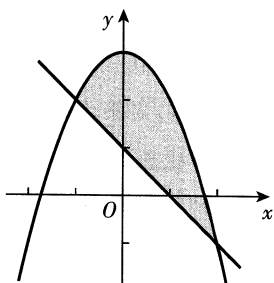
$$\text{根据矩阵乘法的结合律有 } \mathbf{A}^n = \mathbf{B}^T \mathbf{CB}^T \mathbf{CB}^T \mathbf{C} \cdots \mathbf{B}^T \mathbf{C} = \mathbf{B}^T (\mathbf{CB}^T) (\mathbf{CB}^T) \cdots (\mathbf{CB}^T) \mathbf{C} = 3^{n-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C} =$$

$$3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & \frac{3^{n-1}}{2} & 3^{n-2} \\ 2 \times 3^{n-1} & 3^{n-1} & 2 \times 3^{n-2} \\ 3^n & \frac{3^n}{2} & 3^{n-1} \end{bmatrix}.$$

10.【参考答案】

联立方程可求得曲线和直线的交点坐标为 $(-1, 2)$ 和 $(2, -1)$, 因此由定积分的几何应用可知

$$S = \int_{-1}^2 [(3-x^2) - (1-x)] dx = \int_{-1}^2 (2+x-x^2) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$



11.【参考答案】

(1) 假设“第一个人取出的是黄球”为事件 A , “第二个人取出的是黄球”为事件 B . 则 $P(A) = \frac{2}{5}$,

$P(\bar{A}) = \frac{3}{5}, P(B|A) = \frac{19}{49}, P(B|\bar{A}) = \frac{20}{49}$. 根据全概率公式, $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) =$

$$\frac{19}{49} \times \frac{2}{5} + \frac{20}{49} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$(2) \text{ 根据贝叶斯公式, } P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{19}{49}}{\frac{2}{5}} = \frac{19}{49}.$$

12.【参考答案】

(1) 以教师专业标准的理念为指导, 提升自身的专业水平

教师要以数学学科核心素养为依托, 终身学习、不断实践, 掌握教学所需基础知识, 提升教书育人的基本能力。

(2) 数学教师要努力提升通识素养

教师要主动提升包括科学素养、人文素养和信息技术素养等通识素养, 应养成良好的自主学习习惯, 能学习、会学习、善学习, 努力成为学生主动学习、不断进步的榜样。在教学活动中, 应勇于创新, 包括教学方式的

创新,也包括从教学实践中总结经验;包括指导学生学习方式的创新,也包括对学生认知规律的探索;包括对数学知识更为深刻的理解,也包括对数学结构的梳理。

(3) 数学教师要努力提升数学专业素养

为了培养学生的数学学科核心素养,数学教师必须提升自身的“四基”水平、提升数学专业能力,自觉养成用数学的眼光发现和提出问题、用数学的思维分析和解决问题、用数学的语言表达和交流问题的习惯。

(4) 数学教师要努力提升数学教育理论素养

教师要结合教育教学实践,阅读和理解数学教育经典著作,关注前沿进展的要求。认真研读课程标准,理解和把握高中数学课程的目标,深入思考教与学的关系。基于课程标准,认真研读教材,把握“四基”与数学学科核心素养的关联;基于理论与实践,不断探索数学教学的规律,特别是学生学习高中数学的规律,探索如何把科学形态的数学转化为教育形态的数学。理解和把握评价的作用,思考如何通过评价鼓励学生学习的自觉性、如何通过评价调整自己的教学。

(5) 数学教师要努力提升教学实践能力

数学教师应用理论指导实践,不断总结与反思自己的教学实践,不断提高教学能力,并最终落实到课堂、落实到学生。

13.【参考答案】

① 以学生发展为本,指导学生合理选择课程、制定学习计划;② 帮助学生打好基础,发展能力;③ 注重联系,提高学生数学的整体认识;④ 注重数学知识与实际的联系,发展学生的应用意识和能力;⑤ 关注数学的文化价值,促进学生科学观的形成;⑥ 改善教与学的方式,使学生主动地学习;⑦ 恰当地运用现代信息技术,提高教学质量。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 由于 $P(AB) \leq P(A) = 0.6, P(AB) \leq P(B) = 0.7$, 所以当 $P(AB) = P(A)$ 时, $P(AB)$ 取得最大值 0.6。

(2) 由于 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1.3 - P(A \cup B)$, 所以当 $P(A \cup B) = 1$ 时, $P(AB)$ 取得最小值 0.3。

四、论述题

15.【参考答案】

教学从本质上讲就是“预设”与“生成”的矛盾统一体。“预设”是预测与设计,是教师在课前对教学进行有目的、有计划的设想和安排。“生成”是生长和构想,是师生在与教学情境的交互作用以及师生对话互动中超出师生预设方案的新问题、新情况。因此,在新课程理念下的教学设计,应充分考虑学生的知识背景、生活经历与情感体验,在知识学习的过程中,吸引学生主动参与,处理好预设与生成的关系,是激发学生学习兴趣,引导学生主动探究的关键。

在“勾股定理的应用”教学中设计了这样一堂课。准备了皮尺,把学生带到操场上,让学生分别在体育老师和校长那里获取篮板和教学楼的高度,提出问题:在篮板的右上角有一只小鸟要飞到教学楼的左上角,请你利用皮尺和所学知识求出小鸟飞行的最短路径(篮板和教学楼的顶端不能到达)。学生开始活动,有的测量篮板顶端与教学楼顶端的水平距离,有的在绘制几何图形,每一个同学都很认真,大家也很开心,乐在其中,课堂上洋溢着和谐、愉悦、轻松的气氛。这堂课既训练了学生的数学建模思想,又让学生深切体会到数学与生活息息相关。教学应当在预设与生成的和谐中发展,只有架起教学预设与动态生成和谐的桥梁,才能让智慧之火“激情”燃烧在课堂教学之中。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 教师 A 运用的引入方法为温故引入法,这种引入方式一方面可以帮助学生复习旧知,另一方面可以帮助学生建立起新旧知识之间的联系,使学生在学新知的过程中与旧知形成对比,从而加深学生对旧知的掌

握和对新知的理解。案例中教师 A 复习旧知后,出示例题让学生初步感受新知,引发学生思考,学生会联想旧知中等差数列前 n 项和的推导方法来思考等比数列前 n 项和的推导方法,从而可以很好地发挥学生在新知学习中的主动性,提升学生分析和解决问题的能力。

教师 B 运用的引入方法为直接引入法,这种引入方法可以帮助学生快速进入课堂状态,准确把握课堂重点。案例中教师 B 引入新知后,通过例题激发学生的好奇心及探索新知的兴趣并进行进一步的讲解,可以帮助学生了解新知在实际解题中的应用。但这种引入方法使学生成为知识的被动接受者,不能很好地发挥学生学习的主动性,从而不能很好地提升学生自主思考、分析问题的能力。

(2) 分析教师 B“新知学习”环节可知,教师 B 在给出例题后,没有给学生留时间思考,而是直接演示解题方法,让学生进行观看,之后出示习题让学生自主解题。教师的教学要以学生为主体,教师 B 的新知教学过程没有做到这点,没有让学生经历新知探索、自主思考等过程,这不利于学生数学学习能力的提高,从而学生对于新知的理解及掌握也必然达不到一定的教学要求。

对教师 B 的“新知学习”环节的改进建议如下:

① 教师在出示例题后,应该给学生留有一定的时间自主思考、小组讨论,从而培养学生独立思考、合作交流的学习习惯,以及一定的分析、解决问题的能力;

② 教师可以让学生汇报讨论结果,通过层层设问引导学生自主得出新知结论,这一方面符合学生的认知过程,另一方面可以启发学生的思维,从而帮助学生更深入地理解和记忆新知内容;

③ 教师在让学生进行自主练习时,应该进行巡视指导,一方面可以对学生因材施教,另一方面可以帮助教师了解学生对于新知的掌握情况。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学目标

- ① 理解几何概型的概念,掌握几何概型的概率计算公式,理解古典概型和几何概型的区别与联系;
- ② 在探究学习的过程中,提升将实际问题抽象成数学模型问题的能力;
- ③ 经历数学知识的形成过程,体会数学知识与现实世界的联系,培养用数学的眼光看待世界的意识。

(2) 教学过程

一、旧知回顾

带领学生回顾古典概型的相关知识。

二、引入新知

问题 1: 若 x 的取值是区间 $[0, 5]$ 中的整数,任取一个 x 的值,求“取得值不小于 3”的概率。(古典概型)

问题 2: 若 x 的取值是区间 $[0, 5]$ 中的实数,任取一个 x 的值,求“取得值不小于 3”的概率。(几何概型)

学生自主讨论、比较问题 1, 2 的不同,引入新知——“几何概型”。

三、新知探究

1. 试验: 取一个边长为 8 cm 的正方形及其内切圆,随机向其中丢一粒黄豆,那么黄豆落入圆内的概率有多大?

学生利用模具自主探究,教师指导,最终形成下表。

项目	试验	归纳
一个基本事件	黄豆落在正方形内某一点	对应的整个图形上的一点(随机)
所有基本事件形成的集合	正方形面($S_{\text{正}} = 64 \text{ cm}^2$)	对应的所有点形成的一个可度量的区域 D
随机事件 A 对应的集合	内切圆面($S_{\text{圆}} = 16\pi \text{ cm}^2$)	区域 D 中的某一个指定区域 d

(续表)

项目	试验	归纳
随机事件 A 发生的概率	$P(A) = \frac{S_{\text{圆}}}{S_{\text{正}}} = \frac{\pi}{4}$	$P(A) = \frac{S_d}{S_D}$

2. 几何概型的概念:如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积)成比例,则称这样的概率模型为几何概率模型,简称为几何概型。

在几何概型中,事件 A 的概率的计算公式如下:

$$P(A) = \frac{\text{构成事件 } A \text{ 的区域长度(面积或体积)}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度(面积或体积)}}。$$

3. 活动:让学生对比古典概型,找出古典概型和几何概型之间的区别和联系。

学生讨论、教师指导后形成下表。

项目	古典概型	几何概型
定义	满足古典概型两大特征(基本事件有限、等可能性)	每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积)成比例
所有的试验结果	有限个(可列 n 个)	无限个
每个试验结果的发生	等可能	等可能

4. 引入部分问题探究:让学生自主探究课堂开始的两个问题,形成答案后汇报,教师点评、指导,订正答案:

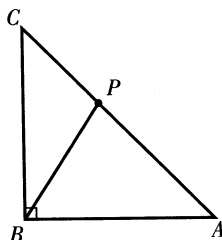
① 问题1 古典概型中的6个基本事件为“取得值为0”“取得值为1”“取得值为2”“取得值为3”“取得值为4”“取得值为5”,“取得值不小于3”包含3个基本事件,为“取得值为3”“取得值为4”“取得值为5”,故 $P(\text{取得值不小于3}) = \frac{1}{2}$;

② 问题2 为几何概型,区域 D 的长度为5,区域 d 的长度为2,故 $P(\text{取得值不小于3}) = \frac{2}{5}$ 。

5. 拓展延伸:上述边长为8 cm的正方形及其内切圆,随机向正方形内丢一粒黄豆,求黄豆落入圆心的概率。

学生讨论,教师总结:概率为0。如果随机事件所在区域是一个单点,则它出现的概率为0,但它不是不可能事件;如果随机事件所在区域是全部区域扣除一个单点,则它出现的概率为1,但它不是必然事件。

(3) 习题变式题:在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle B = 90^\circ$,在 $\angle ABC$ 内作射线 BP 交线段 AC 于点 P ,求使得 $AP < AB$ 的概率。



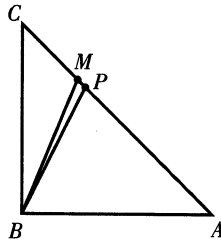
解题过程:在线段 AC 上取一点 M ,使得 $AB = AM$,如下图所示。

根据题意, $\angle ABM = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ$ 。

包含所有基本事件的区域 D 为 $\angle ABC = 90^\circ$ 。

假设“ $AP < AB$ ”为事件 A ,事件 A 所对应的区域 d 为 $\angle ABM = 67.5^\circ$ 。

$$\text{故 } P(A) = \frac{67.5^\circ}{90^\circ} = \frac{3}{4}.$$



解几何概型问题的步骤：

- ① 判断该概率模型是不是几何概型；
- ② 如果是，注意几何度量的选择；
- ③ 把实际问题中的度量关系转化成长度、面积、体积等形式；
- ④ 根据几何概型计算公式求出概率。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(七) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】B。解析：因为 $f(x) = \frac{e^{-x^2+2x-1}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times \frac{1}{2}}} e^{\frac{-(x-1)^2}{2 \times \frac{1}{2}}}$ ，由正态分布的概率密度函数可知，随机变

量 $X \sim N\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，即 $D(X) = \frac{1}{2}$ 。故本题选 B。

2. 【答案】D。解析：线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件： $r(A) = r(A, b) < 3$ 。

$$(A, b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{bmatrix}, \text{由 } r(A) = r(A, b) < 3 \text{ 知,}$$

$a = 1$ 或 $2, d = 1$ 或 2 , 即 $a \in \Omega, d \in \Omega$ 。故本题选 D。

3. 【答案】B。解析：曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切向量为 $(1, 2, 3)$ ，所以曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的法平面方程为 $(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$ ，化简得 $x + 2y + 3z - 6 = 0$ 。

4. 【答案】D。解析：因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x(x-1)} + \ln(1+e^x) \right] = 0$ ，所以 x 轴是曲线的一条水平渐近线；因

为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x-1)} + \ln(1+e^x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x-1)} + \ln(1+e^x) = \infty$ ，所以 $x = 0$ 和 $x = 1$ 是曲线的两条垂直渐近

线；因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x(x-1)} + \ln(1+e^x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x(x-1)} + \ln(1+e^x) - x \right] = 0$ ，所以 $y = x$ 是曲线的一条斜

渐近线。综上，曲线 $y = \frac{1}{x(x-1)} + \ln(1+e^x)$ 有 4 条渐近线。故本题选 D。

5. 【答案】C。解析：当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\frac{\alpha}{n} \rightarrow 0$ 。根据“ $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ”知，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $1 - \cos \frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha^2}{2n^2}$ 。因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为 p 级数， $p = 2 > 1$ ，级数收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{2n^2}$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$ 也收敛，进而可

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$ 绝对收敛。故本题选 C。

6. 【答案】A。解析：非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。由系数矩阵 A 是 $m \times n$ 矩阵知，增广矩阵 $\bar{A} = (A, b)$ 是 $m \times (n+1)$ 矩阵，进而可知， $r(A) \leq r(\bar{A}) \leq m$ 。若 $r(A) = m$ ，则一定有 $r(A) = r(\bar{A}) = m$ ，从而 $Ax = b$ 有解，所以 $r(A) = m$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分条件。B, C, D 三项均不能保证 $r(A) = r(\bar{A})$ 。故本题选 A。

7. 【答案】C。解析：“大角对大边”是定性地描述三角形的边和角的关系，而“正弦定理”——在 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，三角形外接圆的半径为 R ，则有 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ——是定量地给出了三角形的边和角的关系，所以这个研究过程的思路主要表现为从定性到定量。故本题选 C。

8. 【答案】A。解析：《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出，高中数学课程是义务教育阶段后普通高级中学的主要课程，具有基础性、选择性和发展性。

二、简答题

9.【参考答案】

由 $MN = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2x-y & 4x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$, 可得 $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 4x-y=13, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=3, \end{cases}$ 所以 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 。下面用两种方法求矩阵 M 的逆矩阵。

(方法一) $(M, E) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] = (E, M^{-1})$, 所以

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}。$$

(方法二) 根据 $M^{-1} = \frac{M^*}{|M|}$ 计算。因为 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, 所以 $|M| = -5$, $M^* = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, 因此 $M^{-1} =$

$$\frac{M^*}{|M|} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}。$$

10.【参考答案】

A, B, C 至少发生一个的概率是 $P(A \cup B \cup C)$, 根据加法公式可得, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{5}{8} + P(ABC)$ 。由于 $P(ABC) \leq P(AB)$, 而 $P(AB) = 0$, 所以 $P(ABC) = 0$, 于是 $P(A \cup B \cup C) = \frac{5}{8}$ 。 A, B, C 都不发生的概率是 $P(\overline{ABC}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ 。

11.【参考答案】

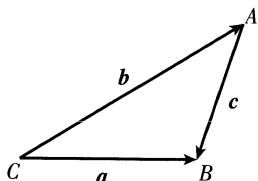
构造辅助函数 $F(x) = xf(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 从而 $F(x)$ 满足拉格朗日中值定理, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$, 又 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$, 所以 $\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$ 。

12.【参考答案】

(1) 结合旧知, 让学生自主探究, 从而引入定理。

例如, 在引入余弦定理之前, 先将向量作为工具让学生自主探究推导出余弦定理, 具体推导如下。

如图, 设 $\vec{CB} = \mathbf{a}$, $\vec{CA} = \mathbf{b}$, $\vec{AB} = \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $|\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 。(其余同理)



(2) 明确定理的内容, 理解定理的定义。如教师在定理推导教学的过程中, 可以向学生渗透已知条件和所得结论, 从而进一步明确定理的内涵和应用环境等。

例如, 明确余弦定理的定义, 余弦定理是三角形的任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与

它们夹角的余弦的积的二倍,即 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB, a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ 。

(3) 熟悉定理的应用。教师要在学生理解定理的基础上做更进一步的教学,即向学生展示例题,教学定理的应用方法,从而使学生逐步掌握定理并得以应用。

例如,例题教学后,向学生明确运用余弦定理的题型,即已知三边求夹角的大小可利用余弦定理求解,已知两边和一边的对角可利用正弦定理和余弦定理。

相关题型可以为①在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = 4, b = 4, c = 3$,求 $\angle A, \angle B, \angle C$;②在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = 3, b = 4, \angle C = 60^\circ$,求其他的边和角。

(4) 引申和拓展定理的运用,引导学生对某些定理做适当的不同方向的推广,也是使学生认识定理之间关系的有效方法,同时也有利于培养学生的创造才能。

例如,在教学余弦定理时,建立与正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 之间的联系。

13.【参考答案】

高中数学课程是义务教育后普通高级中学的一门主要课程,它包含了数学中最基本的内容,是培养公民素质的基础课程。高中数学课程对于认识数学与自然界、数学与人类社会的关系,认识数学的科学价值、文化价值,提高提出问题、分析和解决问题的能力,形成理性思维,发展智力和创新意识具有基础性的作用。高中数学课程有助于学生认识数学的应用价值,增强应用意识,形成解决简单实际问题的能力。高中数学课程是学习高中物理、化学、技术等课程和进一步学习的基础。同时,它为学生的长远发展,形成科学的世界观、价值观奠定基础,对提高全民族素质具有重要意义。

三、解答题

14.【参考答案】

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

$$(2) \text{对线性方程组的增广矩阵作初等行变换可得 } (A, b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{array} \right], \text{要使原线性方程组}$$

有无穷多解,则有 $r(A, b) = r(A) < 4$, 所以有 $1 - a^4 = 0$ 且 $-a - a^2 = 0$, 解得 $a = -1$ 。

$$\text{当 } a = -1 \text{ 时, } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{可知导出组的基础解系为}$$

$(1, 1, 1, 1)^T$, 非齐次线性方程组的特解为 $(0, -1, 0, 0)^T$, 故其通解为 $(0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$, 其中 k 为任意常数。

四、论述题

15.【参考答案】

(1) 数据分析是指针对研究对象获取数据,运用数学方法对数据进行整理、分析和推断,形成关于研究对象知识的素养。数据分析的基本过程包括以下几点。

① 确定分析目的

分析数据之前首先需要确定分析的目的是什么,保证之后的数据分析不会偏离主题。确定分析目的后要对分析的对象、采集数据的手段、采取的分析方法以及最终结论的呈现方式有一个预设,从而确保数据分析实践科学顺利地进行下去。

② 数据收集

按照之前确定的采集数据手段进行数据采集。

③ 数据的处理

由于采集到的数据可能包含误差或者其他干扰因子,所以要采取必要的数学方法对数据进行加工整理(如求平均值,方差等),形成适合数据分析的样式,保证数据的一致性和有效性。

④ 数据分析

对于比较简单且数量不大的数据,可以采取目视分析的方法发现数据所呈现的信息,若数据数量大,且需要分析的数据特征比较多,则可以使用计算机软件进行分析,如 Excel, SPSS。

⑤ 数据展现

根据数据分析的目的选择合适的图表来呈现结论。比如,要研究一年内中国苹果出口占农产品净出口比例的问题时适合使用饼状图。

(2) 培养学生的数据分析素养可以从以下几个方面入手。

① 进行统计知识的教学,让学生掌握必要的数据特征指标,清楚它们的含义,比如,知道平均数是一组数据集中趋势的表征;知道方差是一组数据离散程度的表征。对统计知识的教学,一方面让学生掌握了必要的数据分析手段,另一方面能够有效激发学生对数据分析学习的热情,有助于教师对相关课程的展开。

② 教师在课程中可以设置必要的问题情境,促使学生思考问题,加深学生对数据的认识,体会到数据中隐藏的信息。比如,教师设置问题情境,出示一张表格,让全班同学分别在表格上填上自己的身高,然后让学生分析表格中的数据,提问“我们可以根据表格中的数据得到哪些结论”,学生在自己的角度思考问题有助于发展学生的数据分析素养。

③ 教师应该创设符合学生生活实际的数据分析活动,让学生经历真实的数据分析的全过程,促使学生明白为何要进行数据“收集、整理、描述、分析”以及如何进行的问题。让学生亲身参与数据分析活动,能够帮助学生提升获取有价值信息并进行定量分析的意识 and 能力,是培育学生数据分析素养的最有效手段。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 这两个解法都是误以为双曲线的中心在原点,而题中并没有中心在原点这个条件。

(2) 学生对双曲线的标准方程产生惯性思维,审题不认真,进入思维误区,从而产生错误。

(3) 解法一:设 $P(x, y)$ 为双曲线上任意一点,因为双曲线的右准线为 $x = 4$,右焦点 $F(10, 0)$,离心率 $e =$

2,由双曲线的定义知, $\frac{\sqrt{(x-10)^2 + y^2}}{|x-4|} = 2$,整理得 $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$ 。

解法二:依题意,设双曲线的中心为 $(m, 0)$,则
$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} + m = 4, \\ c + m = 10, \\ \frac{c}{a} = 2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 4, \\ c = 8, \\ m = 2, \end{cases} \text{所以 } b^2 = c^2 - a^2 = 64 - 16 =$$

48。故所求双曲线方程为 $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$ 。

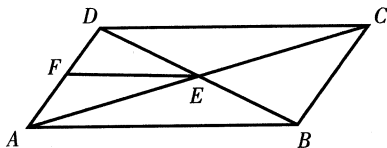
六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学过程

一、复习旧知、铺垫新课

如图,平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 E ,点 F 为线段 AD 的中点,设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$,用向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的线性运算来表示向量 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}$ 。



【设计意图】复习向量的线性运算,可以帮助学生在巩固旧知的基础上,建立起新旧知识之间的联系;结合例题,可以帮助学生初步感知用给定的向量表示平面内其他向量的方法,从而为新知的教学做铺垫。

二、教师设问、学生猜想

教师:我们可以发现通过平面内两个给定向量的线性运算,可以表示出许多不同的向量,那么 we 想通过线性运算表示某些向量,必须给定两个向量吗?

学生思考并回答。(注意特殊情况:零向量)

提问:通过平面内两个给定向量的线性运算可以表示多少向量?

学生猜想并回答。

教师引导学生正确猜想:通过同一平面内两个不共线向量的线性运算可以表示这一平面内任意一个向量。

【设计意图】回忆数乘向量的几何意义和平行向量的基本定理,说明当给定的两个不全为零的向量共线时,只能表示与他们共线的向量,从而形成定理中的“不共线”;当给定的两个向量不共线时,只能表示与他们共面的向量,从而形成定理中的“这一平面内”。由猜想是否成立,引出课题。

三、课堂实践、完善定理

探究1. 教师出示课件,给定一组不共线的向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (共起点),待分解的向量 $\mathbf{a}$,请学生在黑板上作图,并试着说明作图过程及能够用 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 的线性运算来表示的原因。

教师引导学生通过物理学中力的分解来完成。

【设计意图】基底共起点的情况使学生更容易想到逆用平行四边形法则进行分解;通过较简单情况下向量 $\mathbf{a}$ 的分解,让学生体会将向量 $\mathbf{a}$ 用不共线向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 的线性运算进行表示的方法和依据。

探究2. 当向量 $\mathbf{a}$ 可以用不共线向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 的线性运算进行表示时,不改变向量的方向,只改变向量的大小,验证分解的存在性。

①从形的角度来看,可以先想象再配合几何画板直观观察分解的存在性。

②从数的角度思考,由共线向量基本定理,与向量 $\mathbf{a}$ 方向相同的向量一定可以写成 $m\mathbf{a}, \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$, 那么 $m\mathbf{a} = m\lambda_1 \mathbf{e}_1 + m\lambda_2 \mathbf{e}_2$ 。

【设计意图】形的角度更加直观,数的角度更为严谨,潜移默化地使学生体会到向量是着数、形两种属性的数学对象。

探究3. 向量 $\mathbf{a}$ 绕其起点旋转,随着旋转,向量 $\mathbf{a}$ 的分解方法有什么不同吗? 有哪些情况? 请同学画出代表不同情况的向量,对它们分别进行研究,找到一般方法,验证任意性,同时利用几何画板进行动态演示,直观确认任意性。

【设计意图】培养学生分类讨论的意识,从分解出的向量与基底方向的关系到线性运算中系数的符号,为后续课程中建立坐标系,划分象限埋下伏笔;对向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 其中一个共线情况的讨论,为后面分析平面向量基本定理与共线向量基本定理之间的联系做铺垫。

问题1:我们定性地说明了满足要求的实数 λ_1, λ_2 存在,那么到底存在多少组呢?

问题2:得到的“平面向量的基本定理”与共线向量的基本定理有什么联系?

【设计意图】培养学生的逻辑思维能力,使学生进一步体会向量是集数、形于一身的数学概念;理解当基底

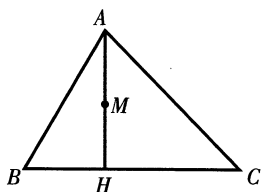
选定后，平面内的任意向量与有序实数对 (λ_1, λ_2) 一一对应。

完善定理：如果 e_1, e_2 是同一平面内的两个不共线的向量，那么对于这一平面内的任意向量 a 存在唯一一对实数 λ_1, λ_2 使 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 。

四、课堂小结

教师：这节课，我们从一个具体问题的探究开始提出我们的猜想，一步一步地完善我们定理的证明。平面向量基本定理是将平面向量任意化归为确定的线性组合的理论依据，是由几何到代数的桥梁。希望同学们通过这节课能够体会一个数学定理的产生过程以及发展过程中蕴含的合理的思维方式。

(2) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， H 为 BC 上异于 B, C 的任一点， M 为 AH 的中点，若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + u \overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda + u =$ _____。



【设计意图】应用平面向量基本定理表示向量的实质是利用平行四边形法则或三角形法则进行向量的加、减或数乘运算，共线向量定理的应用对解答此类问题起着至关重要的作用。当基底确定后，任一向量的表示都是唯一的。

(3) 在高中数学课程中，向量占有很重要的地位，它是联系代数、几何以及三角函数的重要工具，具有非常丰富的实际背景。平面向量的基本定理既是向量加法、减法和数乘的延续和发展，也是后面学习向量的坐标表示，数量积，向量解决立体几何问题的基础和重要工具，起着承上启下的作用，并且很好地体现了数形结合的思想，这也就确立了平面向量基本定理在向量中的核心地位，同时它也是向量由一维到二维过渡的重要桥梁。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(八) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】B。解析：由题意得， $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.1$ ， $P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = 0.3$ 。故本题选 B。

2. 【答案】B。解析：A 项中，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\{(-1)^n\}$ 的极限不存在，该数列发散；B 项中，因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ，所以数列 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ 收敛；C 项和 D 项中，因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n} = +\infty$ ，所以数列 $\{n^2\}$ 和数列 $\left\{\frac{n^2+1}{2n}\right\}$ 均发散。故本题选 B。

3. 【答案】C。解析： $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}} = e^{\frac{1}{2}}$ 。故本题选 C。

4. 【答案】B。解析：因为二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 正定，所以 A 是正定矩阵，则 A 的所有顺序主子式全都大于 0，即有 $2 > 0$ ， $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 > 0$ ， $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix} = 2(9 - a^2) > 0$ ，可得 a 的取值范围是 $-3 < a < 3$ 。故本题选 B。

5. 【答案】D。解析：根据二重积分的意义，被积函数为 1 时表示积分区域的面积，所以 $\iint_D dx dy = S_D = 4\pi$ 。

6. 【答案】B。解析：由矩阵特征值的性质可知，如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值，则 λ^2 是 A^2 的特征值， $k\lambda$ 是 kA 的特征值， $\lambda - 1$ 是 $A - E$ 的特征值。所以矩阵 $A^2 - 3A - E$ 的特征值为 $\lambda^2 - 3\lambda - 1$ ($\lambda = 1, 2, -3$)，即为 $-3, -3, 17$ 。因为矩阵的行列式的值等于矩阵所有特征值的乘积，所以 $|A^2 - 3A - E| = (-3) \times (-3) \times 17 = 153$ 。

7. 【答案】A。解析：推理分为合情推理和演绎推理。演绎推理是思维进程中从一般到特殊的推理，这种推理以形式逻辑或论证逻辑为依据，有三段论、关系推理等推理模式；合情推理是一种合乎情理的、似以为真的推理，合情推理包括归纳推理和类比推理，归纳推理是由个别事实概括出一般结论的推理，是由部分到整体、个别到一般的推理，类比推理是由特殊到特殊的推理。本题中，是通过归纳推理得出结论，没有进行严谨的证明，所以该推理过程运用了合情推理中的归纳推理，没有运用演绎推理。故本题选 A。

8. 【答案】A。解析：A 项为演示法，B 项为讲授法，C 项为演算法，D 项为提问法。故本题选 A。

二、简答题

9. 【参考答案】

(1) 由题可知， $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 2)$ ， $\overrightarrow{AC} = (1, 2, -1)$ ，所以 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 2, -1)$ ，由向量外

积的几何意义可得，三角形 ABC 的面积 $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ 。

(2) 四面体 O-ABC 的体积即为以 OA, OB, OC 为三邻边的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$ 。由混合积的几何意义

知,以 OA, OB, OC 为三邻边的平行六面体体积等于三向量混合积的绝对值, 因为 $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) =$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8, \text{ 所以四面体 } O-ABC \text{ 的体积 } V = \frac{1}{6} \times 8 = \frac{4}{3}.$$

10.【参考答案】

线性方程组的系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k^2 \end{bmatrix}$, 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{bmatrix}$ 。

① 当 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 时, 方程组无解, 此时 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$, 有 $\begin{cases} k^2 = 1, \\ k \neq 1, \end{cases}$ 即 $k = -1$ 。

② 当 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ 时, 方程组有唯一解, 有 $\begin{cases} k^2 \neq 1, \\ k \neq 1, \end{cases}$ 即 $k \neq \pm 1$ 。根据克拉默法则, 可得方程组的解

$$\text{为} \begin{cases} x = \frac{k}{k+1}, \\ y = \frac{1}{k+1}. \end{cases}$$

③ 当 $r(A) = r(\bar{A}) = 1$ 时, 方程有无穷多解, 有 $\begin{cases} k^2 = 1, \\ k = 1, \end{cases}$ 即 $k = 1$ 。此时, 方程组退化为 $x + y = 1$, 它的通解为 $x = 1 - y$, 其中 $y \in \mathbf{R}$ 为自由变量。

11.【参考答案】

σ 的秩等于矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 的秩。对矩阵 A 进行初等行变换, $A \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } r(A) = 2, \text{ 即得 } \sigma \text{ 的秩为 } 2.$$

$\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \{X \mid \sigma(X) = \mathbf{0}\}$, 又 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为 A , 所以 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 为齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解空间。易知 $AX = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $\alpha_1 = \left(-2, -\frac{3}{2}, 1, 0\right)^T, \alpha_2 = (-1, -2, 0, 1)^T$, 所以核 $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \{X \mid X = k_1 \left(-2, -\frac{3}{2}, 1, 0\right)^T + k_2(-1, -2, 0, 1)^T, k_1, k_2 \text{ 为任意实数}\}.$

12.【参考答案】

数学课堂教学导入的方法主要有直接导入法、复习导入法、事例导入法、趣味导入法、悬念导入法和类比导入法等。以“等比数列”为例, 下面主要介绍复习导入法和类比导入法。

(1) 复习导入法

复习导入法即所谓的“温故而知新”, 主要是利用新旧知识之间的逻辑联系, 贯彻巩固与发展相结合的原则, 找出新旧知识之间的联结点, 将旧知识的复习迁移到新知识的学习上来导入新课。通过这种方法来导入新课, 一方面可以帮助学生巩固旧知, 另一方面可以帮助学生建立新旧知识之间的联系, 能有效降低学生对于新知识的认知难度。运用这种导入方法之前, 教师应先摸清学生原有的知识水平, 精选复习、提问新旧知识联系的“支点”。

以“等比数列”为例, 学生在学习这一内容之前已经学习过“等差数列”的相关知识, 可以借助“公差”的概念理解“公比”。因此, 教师可以结合“等差数列”的相关知识点, 运用复习导入法, 在学习新知识前, 带领学

生复习“等差数列”的相关知识,帮助学生找到新旧知识之间的联结点,之后带领学生探索新知。

(2) 类比导入法

类比是指当两个对象具有某些相同或类似属性,而且已经了解其中一个对象的某些性质时,推测另一个对象也有相同或类似性质的思维形式。类比导入法就是以这种思维形式为基础,通过新知与旧知之间的类比,在旧知的基础上探索发现新知。类比导入法简洁明快,既培养了学生的类比推理能力,又能高效地调动学生思维的积极性。

以“等比数列”为例,学生在学习新知之前已经学习过“等差数列”的相关知识。教师可以抓住等差数列的定义,采用类比导入法,列举一个等差数列和一个等比数列,让学生通过对比观察两种数列,结合等差数列的相关性质,来类比分析等比数列的相关性质特征。

13.【参考答案】

同化是指有机体面对一个新的刺激情景时,把刺激整合到已有的图式或认知结构中。顺应是指当有机体不能利用原有图式接受和解释新刺激时,其认知结构发生改变来适应刺激的影响。同化论强调新旧知识的相互作用涉及上位学习、下位学习、并列结合学习三种形式;强调概念和命题的不断分化和综合贯通;强调原有知识的巩固及教材由一般到个别的循序组织。实际应用中,教师要了解学生对新旧知识的掌握程度及接受能力,用耳熟能详的“已知”内容去教导“未知”内容。比如学生在学习“椭圆”的时候,可以类比“圆”学习。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 证明:因为 $\alpha^T \beta = 0$, 所以 $(\alpha^T \beta)^T = \beta^T \alpha = 0$ 。因为 α, β 为三维单位列向量, 所以 $\alpha^T \alpha = 1, \beta^T \beta = 1$ 。由 $A = \alpha \beta^T + \beta \alpha^T$, 可知 $A\alpha = (\alpha \beta^T + \beta \alpha^T)\alpha = \alpha \beta^T \alpha + \beta \alpha^T \alpha = 0\alpha + \beta = \beta$, 同理可得 $A\beta = (\alpha \beta^T + \beta \alpha^T)\beta = \alpha$, 所以 $A(\alpha + \beta) = \alpha + \beta, A(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)$ 。由矩阵特征值、特征向量的概念可知 1, -1 是矩阵 A 的特征值, 它们对应的一个特征向量分别为 $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 。又因为 $r(A) = r(\alpha \beta^T + \beta \alpha^T) \leq r(\alpha \beta^T) + r(\beta \alpha^T) = 1 + 1 = 2$, 所以 $|A| = 0$, 所以 0 也是矩阵 A 的特征值, 由于矩阵 A 有 3 个各不相同的特征值 1, -1, 0, 所以 A 可相似对角化。

(2) 因为 $Ar = 0, r \neq 0$, 可知 r 是矩阵 A 的特征值 0 对应的一个特征向量, 而 $2(\alpha + \beta), \beta - \alpha$ 分别是特征

值 1 和 -1 对应的一个特征向量, 易得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

在数学课堂上,教师恰当地运用类比思想,可以促进学生对知识的理解与吸收,能够加深学生的知识掌握程度,使知识应用能力也得到很好的锻炼。

① 概念形成中的有效类比

概念教学是理论知识教学的重要组成部分,在概念教学中教师可以充分利用类比思想做辅助教学。中学数学的很多知识点存在相似性,教师可以灵活地运用类比思想来辅助理论知识的教学,并且在比较与联系的过程中帮助学生构建知识体系,充分发挥类比教学的作用,极大地促进学生对概念的理解与吸收。

② 知识整合时的有效类比

教师可以引导学生以类比的形式来实现对于新知识点的理解与吸收,也可以让学生在知识点间的类比与对照中更好地认识知识点间的联系与区别。这样不仅能够帮助学生实现知识的良好整合,也可以保障学生对于每一个具体的知识点都有更好的理解与掌握。

③ 问题解决时的类比探究

在很多实际问题的解答中,培养学生掌握问题解决的方法是教学的核心,也是学生知识应用能力的一种良好体现。教师可以有意识地向学生渗透类比思想,让学生在问题解答时类比一些有效的数学思想方法,并且通过解题技巧的迁移来解决更多实际问题,从而极大地提升学生的知识应用能力与实践能力。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 对该备课组拟定的教学目标的评析如下。

① 该目标目的明确,贴合高中阶段概率知识的教学内容,目标主体明确,行为动词恰当。

② 就知识与技能目标而言,上述目标还存在一些不足。概率知识学习之前,教师首先介绍事件的定义并引入频数、频率的概念,以此为基础引入概率知识。此目标没有对频数和频率的阐述。

③ 教学目标还包括过程与方法目标和情感态度与价值观目标,而备课组拟定的教学目标中对这两方面的内容没有具体体现。

教学目标

① 了解事件的种类,了解随机事件的概念并能够举出一些生活中的随机事件,理解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性,理解概率的概念,了解事件发生的频率与概率的区别;

② 通过概率实验经历获取实验数据的过程,培养获取数据,分析数据,发现规律,总结结论的探究能力;

③ 通过经历探究活动过程并得出结论,感受经过思考解决问题的喜悦感,增强对数学的兴趣和学习数学的积极性,感受数学与现实生活的紧密联系。

(2) 教师甲在课堂开始前给学生预设了摸球的情境,以一种情境导入的方式引入新知。这种引入方式能激发学生学习新知的兴趣,培养学生独立思考的学习习惯。但是,由于学生此前没有接触过这种摸球可能性的问题,所以这种导入方式较难引起学生的共鸣,与学生的思维转换没有达到很好的契合,同时割裂了数学学习与生活之间的联系。

教师乙将生活中的事例与新知相结合,运用事例导入法巧妙引出新知。这种导入强调了实践性,能使学生产生亲切感,起到触类旁通的效果,同时让学生感受到生活处处有数学。但是,这种导入方式只是单方面让学生知道不同种事件的定义,没有让学生感受到影响事件可能性大小的因素。

六、教学设计题

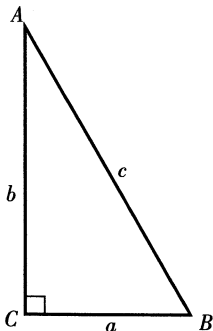
17.【参考答案】

(1) 教学片段

提出问题:我们知道,在任意三角形中有大边对大角,小边对小角的边角关系。我们能否得到这个边角关系准确量化的表示呢?

探究一:直角三角形中边与角的关系

教师给出直角三角形的图形,以及角和边长的表示,即在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 为直角, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对的边长分别为 a , b , c 。



问题:由锐角三角函数的定义,你能写出 $\sin A$ 与 $\sin B$ 的关系吗?

教师引导学生利用初中所学知识找出 $\sin A = \frac{a}{c}$, $\sin B = \frac{b}{c}$, 因为两个式子都含有 c , 对两个式子变形得到

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c, \text{ 又因为 } \sin C = 1, \text{ 上式可以写成 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

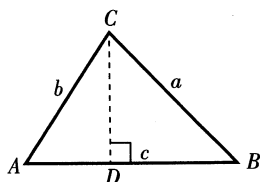
问题：我们发现的结论 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 在直角三角形中成立，在任意的三角形中成立吗？

教师引导学生分两种情况（锐角三角形和钝角三角形），然后按照化未知为已知的思路，构造直角三角形。

探究二：锐角三角形中的边角关系

教师给出任意锐角三角形图形，出示已知条件及问题。

问题：在锐角三角形 ABC 中， $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c 。你能得到结论 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 吗？



教师引导学生过点 C 作 AB 边上的高 CD ，然后根据锐角三角函数的定义，在 $Rt\triangle CDB, Rt\triangle CDA$ 中，可以得出 $CD = a \sin B, CD = b \sin A$ ，由此可以得到 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ；同理，过 A 点作 BC 边上的高，也可以得到 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，由

此得到结论 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

从而证得此结论在锐角三角形中也成立。

问题：当三角形是钝角三角形时，结论 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 成立吗？

延用上述方法，学生自己进行证明操作，全班交流证明过程，教师巡视指导。

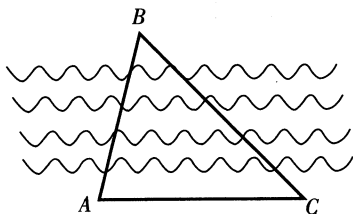
教师总结：通过上面的探索我们发现任意三角形中都存在结论 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

教师给出正弦定理的定义，并强调对任意三角形都存在此定理。

(2) 习题：在三角形 ABC 中，已知 $a = 2\sqrt{2}, b = 2\sqrt{3}, \angle A = 45^\circ$ ，解三角形。

【设计意图】让学生用正弦定理解题，感受到应用该定理的简便之处，题目隐含两种结果，考查了学生对已学知识的掌握程度，帮助学生加深对解三角形这类题目的理解。

(3) A, B 两村庄在河的两岸，有一工程队，要在 A, B 两村庄建一座大桥，要测量两点之间的距离，测量者在 A 村的同侧，在所在河岸边选定一点 C ，测出 AC 之间的距离是 55 米， $\angle ACB = 60^\circ, \angle BAC = 45^\circ$ ，求 AB 之间的距离。



【设计意图】让学生认识到正弦定理在生活中的应用，激发其学习的兴趣，增强其学好数学的信心。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学) 标准预测试卷(九) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】A。解析：对 $\forall A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$, 都有 $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = -A$, 计算得 $a = d = 0, c = -b$, 则 $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} (b \in \mathbf{R})$, 即 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是 W 的一个基, 所以 W 的维数是 1。故本题选 A。

2. 【答案】A。解析：由变限积分求导公式得, $F'(x) = f(\ln x) \cdot (\ln x)' - f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x}f(\ln x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$ 。故本题选 A。

3. 【答案】D。解析： X 服从二项分布, $X \sim B(100, 0.2)$, 所以 $E(X) = 100 \times 0.2 = 20, D(X) = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16$ 。所以 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 16 + 20^2 = 416$ 。

4. 【答案】A。解析：因为 $f'(x_0) = 0, f(x_0) > 0$, 所以 $f''(x_0) = -6f(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值。故本题选 A。

5. 【答案】C。解析：平面 $x - y + 2z = 8$ 的一个法向量为 $n_1 = (1, -1, 2)$, 平面 $2x + y + z = 10$ 的一个法向量为 $n_2 = (2, 1, 1)$, 所以两平面夹角的余弦值 $\cos \theta = |\cos \langle n_1, n_2 \rangle| = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|} = \frac{1}{2}$, 则 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 。故本题选 C。

6. 【答案】D。解析：通解中必有任意常数, A 项错误；齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中解向量的个数为 $n - r(A)$, 所以齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系由一个非零向量构成。由题意无法确定 α_1 是不是零向量, 所以 $k\alpha_1$ 可能为零向量, 排除 B。对于 $\alpha_1 + \alpha_2$, 当 $\alpha_1 = -\alpha_2$ 时, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ (即 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 并不能保证 $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$), 排除 C; 而 $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ 。故本题选 D。

7. 【答案】C。解析：新课标的基本理念之一就是充分促进学生发展。“以学生发展为本”中“发展”的含义包括全体学生的发展、全面和谐的发展、终身持续的发展、个性特长的发展以及活泼主动的发展。

8. 【答案】C。解析：反证法是先假设结论不成立, 进而推出矛盾, 证明结果正确性, 是间接法证明。

二、简答题

9. 【参考答案】

首先, 根据已知求出 $f(x)$ 的表达式, 分类讨论如下:

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax + b}{x^{2n} + 2} = \frac{1 + a + b}{3};$$

$$\text{当 } |x| < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax + b}{x^{2n} + 2} = \frac{ax + b}{2};$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax + b}{x^{2n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{a}{x^{2n-1}} + \frac{b}{x^{2n}}}{1 + \frac{2}{x^{2n}}} = x;$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax + b}{x^{2n} + 2} = \frac{-1 - a + b}{3}.$$

$$\text{于是 } f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{2}, & |x| < 1, \\ x, & |x| > 1, \\ \frac{1+a+b}{3}, & x = 1, \\ \frac{-1-a+b}{3}, & x = -1. \end{cases} \quad \text{因为 } f(x) \text{ 是连续函数, 所以进一步讨论如下:}$$

$$\text{在 } x = 1 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax+b}{2} = \frac{a+b}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1, f(1) = \frac{1+a+b}{3}, \text{要使 } f(x) \text{ 在 } x = 1 \text{ 处}$$

$$\text{连续, 则 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1), \text{ 即 } \begin{cases} \frac{a+b}{2} = 1, \\ \frac{1+a+b}{3} = 1, \end{cases} \quad \text{解得 } a+b = 2;$$

$$\text{在 } x = -1 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{ax+b}{2} = \frac{b-a}{2}, f(-1) = \frac{-1-a+b}{3}, \text{要使}$$

$$f(x) \text{ 在 } x = -1 \text{ 处连续, 则 } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1), \text{ 即 } \begin{cases} \frac{b-a}{2} = -1, \\ \frac{-1-a+b}{3} = -1, \end{cases} \quad \text{解得 } a-b = 2.$$

$$\text{联立 } \begin{cases} a+b = 2, \\ a-b = 2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 0. \end{cases}$$

故当 $a = 2, b = 0$ 时, $f(x)$ 是连续函数。

10.【参考答案】

$$\text{过直线 } \begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases} \text{ 的平面系方程为 } \lambda(2x+y-2z+1) + \mu(x+2y-z-2) = 0, \text{ 即 } (2\lambda+\mu)x +$$

$(\lambda+2\mu)y - (2\lambda+\mu)z + \lambda - 2\mu = 0$, 其中 λ, μ 不同时为 0。要使所求平面与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直, 则有 $(2\lambda+\mu) \times 1 + (\lambda+2\mu) \times 1 - (2\lambda+\mu) \times 1 = 0$, 整理得 $\lambda = -2\mu$, 不妨令 $\mu = -1$, 则 $\lambda = 2$, 所求平面方程为 $3x - 3z + 4 = 0$ 。

11.【参考答案】

(1) 证明: 设矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3)$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) P$, 所以 $r(A) = r(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))$, 因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, 所以 $r(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \geq 2$, 即 $r(A) \geq 2$, 又 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 也就是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 所以 $r(A) < 3$ 。因此 $r(A) = 2$ 。

(2) 因为 $r(A) = 2$, 所以齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有一个非零解向量, 由于 $\alpha_1 + 2\alpha_2 -$

$$\alpha_3 = 0, \text{ 所以基础解系为 } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ 又由 } \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \text{ 得非齐次方程组 } Ax = \beta \text{ 的一个特解为 } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。 \text{ 因}$$

$$\text{此方程组 } Ax = \beta \text{ 的通解为 } x = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数。}$$

12.【参考答案】

向量在高中数学课程中的作用, 主要体现在它有利于培养学生数形结合的思想方法, 有利于拓宽解题思路, 有利于发展学生的运算能力。

(1) 向量的引入有利于培养学生数形结合的思想方法

向量集数与形于一身, 它既是代数研究对象, 又是几何研究对象; 既可以进行运算, 又可以用图形表示, 它

是数形结合思想方法的体现。因此,学习向量知识有利于培养学生数形结合的思想方法。

(2) 向量的引入有利于拓宽解题思路

向量方法既是数学思想方法的体现,又是问题解决的一种方法途径。在中学数学中,向量使数与形合二为一,联系几何、代数、三角函数等知识。它既是解决问题的思想方法,又是手段工具,它使得学生在解决数学问题时思路清晰明确,降低思维转换过程的难度。向量方法对于解决数学问题及日常生活中的实际问题具有重要价值。

(3) 向量的引入有利于发展学生的运算能力

向量的线性运算与多项式的运算相类似,其运算特点主要表现在向量的数量积运算。向量的运算与数的运算、多项式的运算既有联系又有区别,向量的运算形式比较多,比较全面。学习向量知识可以发展学生的运算能力,增强学生对代数运算本质的认识。

13.【参考答案】

实施合作学习应注意的问题主要有以下几点:

(1) 确定适当的合作学习内容,合作学习是一种学习方式,也是一种手段,学习方式与所学内容要互相适应,不是所有的学习领域和学习主题都需要合作学习的方式;

(2) 合作学习的主要目的是加强师生之间的交流与互动;

(3) 合作学习应在独立思考的基础上进行;

(4) 要防止合作学习流于形式。

三、解答题

14.【参考答案】

当 $g(x) = 0, x \in [a, b]$ 时,有 $\int_a^b g(x) dx = 0, \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$,此时任意 $\xi \in [a, b]$,有 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx = 0$ 。

当 $g(x) \neq 0$ 时,因为 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号,所以必有对任意 $x \in [a, b], g(x) > 0$ 或 $g(x) < 0$ 。不妨设 $x \in [a, b]$ 时, $g(x) > 0$ 。根据最值定理知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则必取到最小值 m 和最大值 M ,所以对任意 $x \in [a, b]$,都有 $m \leq f(x) \leq M$,进而有, $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$,可以推出

$$\int_a^b mg(x) dx = m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b Mg(x) dx = M \int_a^b g(x) dx。$$

因为 $\int_a^b g(x) dx > 0$, 可得 $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$, 根据介值定理可知,至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = f(\xi), \text{即} \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx。$$

综上,至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ 。结论得证。

四、论述题

15.【参考答案】

“人人都能获得良好的数学教育,不同的人在数学上得到不同的发展。”这里的“人人”指的是学习数学课程的所有人,是大众教育,而不是指少数人。知识技能、数学思考、问题解决、情感态度与价值观的整体发展是“良好教育的标志”。“不同的人在数学上得到不同的发展”,这是对人的主体性地位的回归与尊重。平时在教学中要注重学生的主体性地位,正视学生的差异,尊重学生的个性,促进学生更好地自主发展。例如,课程的设计要满足学生未来生活、工作和学习的需要。使学生掌握必需的数学基础知识和基本技能,发展学生的抽象思维和推理能力,培养应用意识和创新意识,在情感态度与价值观等方面都要得到

发展。因此,在数学教学过程中,可以采用多层次教学。多层次教学法能够提高我们教与学的目的性、层次性和主动性,克服千篇一律,千人一面的被动性与盲目性,从真正意义上体现“以人为本,因材施教”的新课程精神。使每个层次的学生都能达到“跳一跳,够得着”的境地,让学生体验到学习的快乐,从而激发学生的学习热情。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 小刘没有考虑函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的值域,即 $y \geq 2$ 或 $y \leq -2$,而通过一元二次方程解出的两个值中应舍去 1,答案应选 D。错误原因:忽略了隐含条件,没有考虑函数本身的限制。

(2) 正确解析:因为 $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + x + \frac{1}{x} = 0$,令 $x + \frac{1}{x} = t$,得关于 t 的一元二次方程 $t^2 + t - 2 = 0$,解得 $t = -2$ 或 $t = 1$,又由 $x + \frac{1}{x} = t$ 知, $t \geq 2$ 或 $t \leq -2$ 。所以 $x + \frac{1}{x} = t = -2$,即应选 D 项。

(3) 本题中运用的数学思想有整体思想,把 $x + \frac{1}{x}$ 作为整体来计算;化归思想,把原方程转化为一元二次方程来求解;方程思想。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 情境导入

师:生活中,我们经常用到许多有自动控制功能的电器。例如,洗衣机在甩干时,如果“到达预定的时间”或“机盖被打开”,就会停机,即当两个条件至少有一个满足时,就会停机。与此对应的电路,叫或门电路。又如,电子保险门在“钥匙插入”且“密码正确”两个条件都满足时,才会开启。与此对应的电路,叫与门电路。随着高科技的发展,诸多科学领域均离不开类似以上的逻辑要求。因此,我们有必要对简易逻辑加以研究。

(2) 实例 1

师:在初中,我们已经学过命题,知道可以判断真假的语句叫作命题。

试分析以下 8 个语句,说出哪些是命题,哪些不是命题,哪些是真命题,哪些是假命题。

① $12 > 5$;

② 3 是 12 的约数;

③ $\frac{1}{2}$ 是整数;

④ $\frac{1}{2}$ 是整数吗?

⑤ $x > \frac{1}{2}$;

⑥ 10 可以被 2 或 5 整除;

⑦ 菱形的对角线互相垂直且平分;

⑧ $\frac{1}{2}$ 不是整数。

(让学生回答,教师给出点评)

师:我们可以看出,①②是真命题;③是假命题;因为④不涉及真假,⑤不能判断真假,所以④⑤都不是命题;⑥⑦⑧是真命题。

教师小结:“或”“且”“非”这些词叫作逻辑联结词,像①②③这样的命题,不含逻辑联结词,叫作简单命题;像⑥⑦⑧这样,由简单命题与逻辑联结词构成的命题,叫作复合命题。

【设计意图】将初中所学知识与本节要学习的知识连接起来,方便学生理解简单命题与复合命题的概念

与区别。

实例 2

师：对于三种复合命题，如何判断其真假呢？下面要求学生自己设计或真或假的命题来填下面表格：

p	非 p
真	
假	

p	q	p 且 q
真	真	
真	假	
假	真	
假	假	

p	q	p 或 q
真	真	
真	假	
假	真	
假	假	

结合学生回答情况，将上面的表格补充完整，并给出真值表的定义。要求学生对每一真值表用一句话总结，之后教师小结：

- ①“非 p ”形式的复合命题的真假与 p 的真假相反；
- ②“ p 且 q ”形式的复合命题当 p 与 q 同为真时为真，其他情况时为假；
- ③“ p 或 q ”形式的复合命题当 p 与 q 同为假时为假，其他情况时为真。

【设计意图】运用图表的形式，形象而直观地将如何判断复合命题的真假展现给学生，学生自己动手填写更能加深印象。

（3）难点：正确区分数学中的逻辑联结词“或”“且”“非”与日常生活中“或”“且”“非”的含义；简洁准确地运用逻辑联结词表述命题；准确判断复合命题的真假。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(十) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】D。解析：由 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, 得 $y = b \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$, $0 \leq x \leq a$ 。令 $\sqrt{\frac{x}{a}} = t$, $0 \leq t \leq 1$, 则 $dx = 2atdt$ 。曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 和两坐标轴所围成的面积 $S = \int_0^a b \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \int_0^1 b(1-t)^2 2atdt = 2ab \cdot \int_0^1 (t - 2t^2 + t^3) dt = \frac{ab}{6}$ 。

2. 【答案】A。解析：直线 l 的一个方向向量 $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -7(4, -2, 1)$, 平面 π 的一个法向量 $n = (2, 6, 4)$, 易知 $s \perp n$, 又直线 l 上一点 $\left(-\frac{10}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$ 不在平面 π 上, 所以直线 l 平行于平面 π 。

3. 【答案】B。解析： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \sin \frac{i\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}$ 。

4. 【答案】B。解析：由题意可知, $|A| = 3$, 则 $A^*A = AA^* = 3E$ 。在等式 $ABA^* = 2BA^* + E$ 两边同时右乘 A , 化简得 $3(A - 2E)B = A$, 所以 $|B| = \frac{|A|}{3^3 |A - 2E|} = \frac{1}{9}$ 。故本题选 B。

5. 【答案】D。解析：离散型随机变量的概率分布之和等于 1, 即 $\sum_{k=1}^N P(X=k) = \sum_{k=1}^N \frac{kc}{N} = c \frac{N(N+1)}{N} = 1$, 所以 $c = \frac{2}{N+1}$ 。故本题选 D。

6. 【答案】D。解析：因为向量 α 是 A^{-1} 的特征向量, 所以 α 也是 A 的特征向量, 则存在一个常数 λ , 有 $A\alpha = \begin{bmatrix} 3+k \\ 2+2k \\ 3+k \end{bmatrix} = \lambda \alpha = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda k \\ \lambda \end{bmatrix}$, 所以 $k = \frac{2+2k}{3+k}$, 解得 $k = 1$ 或 $k = -2$ 。故本题选 D。

7. 【答案】C。解析：欧拉通过对七桥问题的研究提出了“一笔画定理”：一个图形要能一笔画成必须符合两个条件，一是图形是连通的(图形的各部分之间连接在一起)，二是图形中的奇点(与奇数条边相连的点)个数为 0 或 2。

8. 【答案】C。在必修课程中, 学生要学习函数的概念和性质, 总结研究函数的整体方法, 掌握一些具体的基本函数, 探索函数的应用。故 C 项说法不正确。

二、简答题

9. 【参考答案】

由题意可得, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x + b) = 1 + b$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{2}$, 因此 $1+b = \frac{1}{2} = a$, 故可得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 。

10.【参考答案】

$$E(Y) = E\left(2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4\right) = 2E(X_1) - E(X_2) + 3E(X_3) - \frac{1}{2}E(X_4) = 2 \times 1 - 2 + 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 4 = 7.$$

$$\text{因为 } X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ 相互独立, 所以有 } D(Y) = D\left(2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4\right) = 4D(X_1) + D(X_2) + 9D(X_3) + \frac{1}{4}D(X_4) = 4 \times 4 + 3 + 9 \times 2 + \frac{1}{4} \times 1 = 37.25.$$

11.【参考答案】

(1) 由交空间的维数公式知, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)$, 其中 $\dim W_1 = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$$\alpha_3) = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 3, \dim W_2 = r(\beta_1, \beta_2) = r \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} = 2, \dim(W_1 + W_2) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2),$$

$$\beta_2) = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 4, \text{ 所以 } \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

(2) 由(1)知 $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, 所以交空间的一个基只有一个非零向量, 不妨设为 $\alpha_0 (\alpha_0 \neq 0)$, 则存在一组实数 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 , 有 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 = \alpha_0 (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \text{ 不全为 } 0)$, $(a_1, a_2, a_3, -b_1, -b_2)^T$ 即为线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)X = 0$ 的一组非零解. 计算得线性方程组的一组非零解为 $(6, -2, 0, -3, 1)^T$, 则 $\alpha_0 = 6\alpha_1 - 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = 3\beta_1 - \beta_2 = (4, 10, -4, -10)^T$, 即为 $W_1 \cap W_2$ 的一个基.

12.【参考答案】

归纳推理是由某类事物的不同对象具有某些特征, 推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理. 它是由部分到整体, 由特殊到一般的推理, 思维过程大致由“实验、观察”到“概括、推广”再到“猜测一般性结论”. 例如, 在学习“勾股定理”内容时, 教师以直角三角形的三边为边长分别向三角形外侧画出对应的正方形, 让学生观察三个正方形面积的关系, 再引导学生思考三个正方形面积的关系与直角三角形三边的关系, 从而初步发现该直角三角形三边存在的关系, 最后通过上述过程归纳出猜想, 推广至一般性结论, 即“勾股定理”.

类比推理是根据两个或两类对象有部分属性相同或相似, 从而推出它们的其他属性也相同或相似的推理. 它是由特殊到特殊的推理, 思维过程大致由“观察、比较”到“联想、类推”再到“猜测新的结论”. 例如, 在学习“立体几何”内容时可以类比“平面几何”的性质特征, 立体几何与平面几何的许多概念、性质是相似的, 类比“长方形的每一边恰好与其相对的边平行, 而与其相邻的边垂直”可以推出“长方体的每一面恰好与其相对的面平行, 而与其相邻的面垂直”. 又如, 在学习“球的标准方程”内容之前学过“圆的标准方程”, 由于圆和球都是到定点的距离等于常数的点的集合, 所以在学球的相关内容时自然会联想到圆, 所以通过类比可以引导学生由圆的标准方程“ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ”, 推出球的标准方程“ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ ”.

归纳推理和类比推理都属于合情推理, 都是根据已有事实, 经过观察、分析、比较、联想, 之后进行归纳、类比, 然后提出猜想的推理. 从推理结论来看, 二者所得结论均不一定正确, 有待进一步证明. 合情推理是指“合乎情理”的推理, 在数学的研究中, 得到一个新结论之前, 归纳推理和类比推理常常帮助我们猜测和发现结论, 为我们提供证明新结论的思路和方向.

13.【参考答案】

数学素养是新时代公民文化素养的重要组成部分,当今信息化的时代也要求人们具有更高的数学素养。提升学生的数学素养,就是要让学生懂得用数学眼光观察世界,会用数学思维思考世界,会用数学语言表达世界,具体可以从以下几个方面来提升学生的数学素养。

(1) 注重学生理论联系实际,将数学知识应用于实际生活能力的培养

我们所学的数学知识最终都要回归到实际生活中去。一方面,教师在教学新知的过程中要恰当地引入与新知相关的实际生活情境,让学生在生活情境中去感悟数学元素,引导学生从实际案例中体会数学概念,从而加深学生对新知的理解和记忆。另一方面,要启发学生将所学的数学知识应用到实际问题中,学会分析实际问题并抽象出一般的数学模型,从而掌握解决问题的技能与方法。

(2) 注重学生学科核心素养的培养

高中数学课程标准要求学生具备的核心素养有数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。教师在教学中一方面要夯实自身的学科素养,另一方面要积极引领学生形成相应的学科素养。比如,在数据分析这一学科素养的培养中,教师可给出一个统计案例,让学生独立分析数据,并提出从数据中可以发现的信息,进行必要讨论,总结经验,从而提升学生获取有价值信息并进行定量分析的意识 and 能力。

(3) 注重学生数学思想方法的培养

数学思想方法是人们对数学理论和内容的本质认识,常见的有函数与方程、转化与化归、分类讨论、数形结合等。在实际教学中,教师要注重渗透数学思想方法,培养学生在解决问题时主动使用数学思想方法的意识,学生掌握基本的数学思想方法是学生今后学习或步入职场分析、解决问题必备的基本素养。

(4) 注重学生对数学历史的了解,渗透数学文化

教师在教学中应当增设相关的数学史的介绍。一方面,可以有效地拓宽学生的眼界,让学生清楚数学发展的历史,激发学生学习数学的兴趣;另一方面,了解知识的形成历史,有助于加深学生对相关概念的理解,对学生学习的新知起到巩固的作用。

三、解答题

14.【参考答案】

直线 l_1, l_2 上分别有定点 $P_1(-2, 2, -9), P_2(1, -6, -4)$, 其方向向量分别为 $s_1 = (0, 1, 8), s_2 = (1, 2, 12)$ 。

$$(1) \text{ 由于 } (s_1 \times s_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \\ 3 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -81 \neq 0, \text{ 即向量 } s_1, s_2, \overrightarrow{P_1P_2} \text{ 不共面, 所以两直线异面.}$$

$$(2) \text{ (方法一) 由于 } s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{vmatrix} = (-4, 8, -1), \text{ 故过 } l_2 \text{ 与 } l_1 \text{ 平行的平面 } \pi \text{ 的法向量为 } (-4, 8, -1), \text{ 且过 } P_2(1, -6, -4), \text{ 其方程为 } -4(x-1) + 8(y+6) - (z+4) = 0, \text{ 整理得 } 4x - 8y + z - 48 = 0. \text{ 所以两直线的距离转化为求点 } P_1 \text{ 到平面 } \pi \text{ 的距离, } d = \frac{|4 \times (-2) - 8 \times 2 + 1 \times (-9) - 48|}{\sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2}} = 9.$$

$$\text{(方法二) 公垂线的方向向量 } l = s_1 \times s_2 = (-4, 8, -1), \overrightarrow{P_1P_2} = (3, -8, 5), \text{ 则两直线之间的距离等于向量 } \overrightarrow{P_1P_2} \text{ 在向量 } l \text{ 方向上的投影的长度, 即 } d = \frac{|l \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|l|} = \frac{|-81|}{9} = 9.$$

$$(3) \text{ 由题意知, 所求平面过线段 } P_1P_2 \text{ 的中点 } P\left(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{13}{2}\right), \text{ 其法向量为 } s_1 \times s_2 = (-4, 8, -1), \text{ 故}$$

所求平面方程为 $4x - 8y + z - \frac{15}{2} = 0$ 。

(4) 设公垂线为 l , 其方向向量 $l = s_1 \times s_2 = (-4, 8, -1)$ 。 l 与 l_1 相交所成平面 π_1 的法向量 $l \times s_1 =$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 65i + 32j - 4k = (65, 32, -4), \text{ 又平面 } \pi_1 \text{ 过 } P_1(-2, 2, -9), \text{ 所以其方程为 } 65(x+2) +$$

$$32(y-2) - 4(z+9) = 0, \text{ 整理得, } 65x + 32y - 4z + 30 = 0.$$

π_1 与 l_2 的交点即为公垂线与 l_2 的交点 Q , 由 $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+4}{12}, \\ 65x + 32y - 4z + 30 = 0, \end{cases}$ 解得 $Q(2, -4, 8)$ 。

所以公垂线的方程为 $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+4}{8} = \frac{z-8}{-1}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

提升学生的数学实际应用能力可从以下几个方面展开。

(1) 教师在实际教学的过程中可以设置合适的问题情境, 促使学生将所学知识与实际生活联系起来, 这样一方面激发了学生学习数学知识的积极性, 另一方面让学生感悟数学在实际生活中的应用。比如在学习了三角函数的知识之后, 教师可给出一个实际案例(比如测量太阳下一棵树的高度), 让学生独立分析问题, 解决问题。

(2) 增加学生对于实际问题进行数学抽象的训练。教师要有目的地引导学生根据所学的数学知识将实际问题简化为一般数学问题。同时要鼓励学生在实际生活中去发现问题, 并尝试用所学知识去解决, 若无法解决的可以记录下来, 在上课时大家一起讨论。

(3) 教师可以搜集一些应用数学知识的事例, 分享给学生, 让学生了解数学知识的相关历史, 激发学生应用数学解决实际问题的热情。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 课程的内容不仅包括数学的结果, 也包括数学结果形成的过程和蕴含的数学思想方法, 教师让学生独立思考的做法帮助学生很好地处理直接经验与间接经验的关系。在教学活动中师生积极参与、交往互助、共同发展, 学生独立思考, 激发了学生学习的兴趣, 培养了学生的创造性思维, 使学生养成良好的学习习惯, 掌握恰当的学习方法。此外, 教师在学生给出结果后给予矫正, 使学生获得正确的知识, 从而掌握一题多解的方法。

(2) 教师在此次教学过程中没有让学生自己总结得出结论, 不符合以学生为主体的课标要求, 没有起到合作者、组织者和引导者的作用; 教师的板书总结缺乏学生积极参与的过程, 且在教学的过程中并没有给学生足够的时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等过程。教师应该注重启发式教学和因材施教, 应当处理好教师教与学生学的关系, 引导学生独立思考、主动探索、合作交流, 使学生掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法, 获得基本的数学活动经验。

(3) 数形结合思想、化归思想。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 问题引入

问题: 求方程 $3x^2 + 6x - 1 = 0$ 的实数根。

变式: 求方程 $3x^5 + 6x - 1 = 0$ 的实数根。

师: 一次、二次、三次、四次方程的解都可以通过系数的四则运算, 乘方与开方等运算来表示, 但高于四次

的方程不能用公式求解。大家课后去阅读本节后的“阅读与思考”，还有如 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 的实数根很难下手，我们寻求新的角度——函数来解决这个问题。

【设计意图】从学生的认知冲突中，引发学生的好奇心和求知欲，推进对问题进一步的探究。通过简单的引导，让学生课后独立阅读相关内容，培养其自学能力。开门见山地提出用函数思想解决方程根的问题，从而点明本节课的目标。

(2) 问题①：求方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的实数根，并画出函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图像。

问题②：从形式上，观察函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 与相应方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 有何联系？

问题③：由于形式上的联系，方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的实数根在函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图像中如何体现？

【设计意图】以学生熟悉的二次函数图像和二次方程为基础，让学生观察方程和函数形式上的联系，从而得到方程实数根与函数图像之间的关系，进而使其理解零点是连接函数与方程的结点。

(3) 教学重点：了解函数零点的概念，体会方程的根与函数零点之间的联系，掌握函数零点存在性的判断。

(4) 教学难点：准确理解零点的概念，在合情推理中让学生体会到判定定理的充分非必要性，能利用适当的方法判断零点是否存在或确定零点。

(5) 本节课是在学生学习了“基本初等函数(I)”的基础上，学习函数与方程的第一课时，本节课中通过对二次函数图像的绘制、分析，得到零点的概念，然后进一步探索函数零点存在性的判定，这些活动就是让学生在了解初等函数的基础上，利用计算机描绘函数的图像，通过对函数与方程的探究，对函数有进一步的认识，从而解决方程根的存在性问题，为下一节“用二分法求方程的近似解”做准备。

图书在版编目(CIP)数据

数学学科知识与教学能力历年真题及标准预测试卷. 高级中学 / 中公教育教师资格考试研究院编著. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2016. 6(2021. 7 重印)

国家教师资格考试专用教材

ISBN 978-7-5192-1029-8

I. ①数… II. ①中… III. ①中学数学课-教学法-高中-中学教师-资格考试-习题集
IV. ①G633. 602-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 068692 号

书 名 国家教师资格考试专用教材·数学学科知识与教学能力历年真题及标准预测试卷(高级中学)
GUOJIA JIAOSHI ZIGE KAOSHI ZHUANYONG JIAOCAI · SHUXUE XUEKE ZHISHI YU JIAOXUE NENGLI
LINIAN ZHENTI JI BIAOZHUN YUCE SHIJUAN (GAOJI ZHONGXUE)

编 著 中公教育教师资格考试研究院

责任编辑 夏 丹

特约编辑 华炜超

出版发行 世界图书出版公司北京公司

地 址 北京市东城区朝内大街 137 号

邮 编 100010

电 话 010-64038355(发行) 64037380(客服) 64033507(总编室)

网 址 <http://www.wpcbj.com.cn>

邮 箱 wpcbjst@vip.163.com

销 售 各地新华书店

印 刷 三河市恒彩印务有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 18

字 数 432 千字

版 次 2016 年 6 月第 1 版

印 次 2021 年 7 月第 23 次印刷

国际书号 ISBN 978-7-5192-1029-8

定 价 42.00 元

如有质量或印装问题,请拨打售后服务电话 010-82838515